MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică şi Fizică
"Vrănceanu – Procopiu"
Ediția a XVI –a, 2014

XI

Problema I (10 puncte)

a) Dați exemplu de şir $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietățile: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a_{n-2}) = 0$, iar şirul $b_n = a_n - a_{n-1}, n \geq 2$, este nemărginit.

b) Fie un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a_{n-2}) = 0$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0$.

***

Soluție.

a) De exemplu, putem considera şirul $a_n = (-1)^n\sqrt{n}$: $a_n - a_{n-2} = (-1)^n\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-2}\right) = (-1)^n\dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-2}} \to 0$, însă $b_n = a_n - a_{n-1} = (-1)^n\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)$ este nemărginit. **(4p)**

b) Considerăm şirul $c_n = (-1)^n(a_n - a_{n-1})$. Folosind lema Stolz-Cesaro, avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1} - c_n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}(a_{n+1} - a_{n-1}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n} = 0.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0$. **(5p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Spunem că matricea $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea (P) dacă: oricare ar fi matricele $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care $AB = U$, atunci $BA = U$. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:
(i) U are proprietatea (P);
(ii) există $a \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $U = aI_n$.

Marian Andronache

Soluție.

(ii)$\Rightarrow$(i): $AB = aI_n \Rightarrow \det A \cdot \det B = a^n \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow B = aA^{-1} \Rightarrow BA = aA^{-1}A = aI_n$. **(2p)**

(i)$\Rightarrow$(ii): Fie U matrice cu proprietatea (P). Arătăm că U comută cu oricare matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$U(A^{-1}A) = U \Rightarrow (UA^{-1})A = U \overset{(P)}{\Rightarrow} A(UA^{-1}) = U \Rightarrow AUA^{-1} = UA^{-1}A = UAA^{-1} \Rightarrow AU = UA$. **(2p)**

Arătăm acum că U comută cu oricare matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: există $\lambda \in \mathbb{C}$ pentru care $\det(X - \lambda I_n) \neq 0$. Matricea $X - \lambda I_n$ fiind invesabilă, avem: $(X - \lambda I_n)U = U(X - \lambda I_n) \Rightarrow XU - \lambda U = UX - \lambda U \Rightarrow XU = UX$. **(2p)**

Cum U comută cu toate matricele din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, rezultă că $U = aI_n, a \in \mathbb{C}$. **(1p)**

Rămâne să dovedim că $a \neq 0$. În caz contrar, U ar fi matricea nulă, care nu are proprietatea (P): alegem $A=\left(a_{ij}\right)$ cu $a_{11}=1$ şi $a_{ij}=0$ în rest şi $B=\left(b_{ij}\right)$ cu $b_{n1}=1$ şi $b_{ij}=0$ în rest şi avem că $AB=O_n$ şi $BA \neq O_n$. **(2p)**